

Inženjerska geodezija 2

Geodetska merenja u inženjerstvu

Milutin Pejović

2025-09-21

Sadržaj

- Deo I: Zadaci inženjerske geodezije
- Deo II: Tipovi inženjerskih projekata
- Deo III: Geodetska merenja u inženjerstvu
- Deo IV: Osvrt na teoriju grešaka i statističku analizu
- Deo V: Uticaj grešaka merenja - zakon o prenosu grešaka

Deo I: Zadaci inženjerske geodezije

Koji su osnovni zadaci inženjerske geodezije?

-  **Geodetsko snimanje:**
Prikupljanje podataka o geometriji objekata (oblik, dimenzije, međusobni odnosi).
-  **Geodetsko obeležavanje (pozicioniranje):**
Prostorno pozicioniranje objekta ili njegovih delova u skladu sa projektovanim geometrijom.
-  **Geodetsko osmatranje deformacija:**
Praćenje promena na objektima kroz vreme – pomeranja, deformacije i druge geometrijske promene.

Geodetsko snimanje u inženjerskim projektima

- Geodetsko snimanje odnosi se na prikupljanje podataka o geometriji objekata (oblik, dimenzije, međusobni odnosi);
- Geodetsko snimanje prisutno je u svim fazama realizacije nekog inženjerskog projekta. Od faze planiranja i projektovanja kada je zadatak snimiti područje ili objekat od interesa, preko faze izgradnje, kada je potrebno snimiti izvedene radove na različitim fazama, do geodetskog snimanja izvedenog objekta u celini.
- Svrha geodetskog snimanja zavisi od faze realizacije projekta. U fazi projektovanja je izrada podloga za projektovanje (npr. digitalni topografski planovi područja), dok geodetsko snimanje u fazi realizacije projekta (u toku izgradnje) ima za cilj da registruje geometriju izvedenih radova i time dokumentuje izvedene radove u geometrijskom smislu. Proizvod geodetskog snimanja mogu služiti za izradu geodetskog elaborata za upis objekta u katastar itd.
- Proizvodi geodetskog snimanja predstavljaju osnov za izradu planske i tehničke dokumentacije neophodne za dalje planiranje izgradnje ili izmena postojećih objekata, kao i za proveru sprovedenih radova i kontrolu kvaliteta.

Geodetsko snimanje u inženjerskim projektima

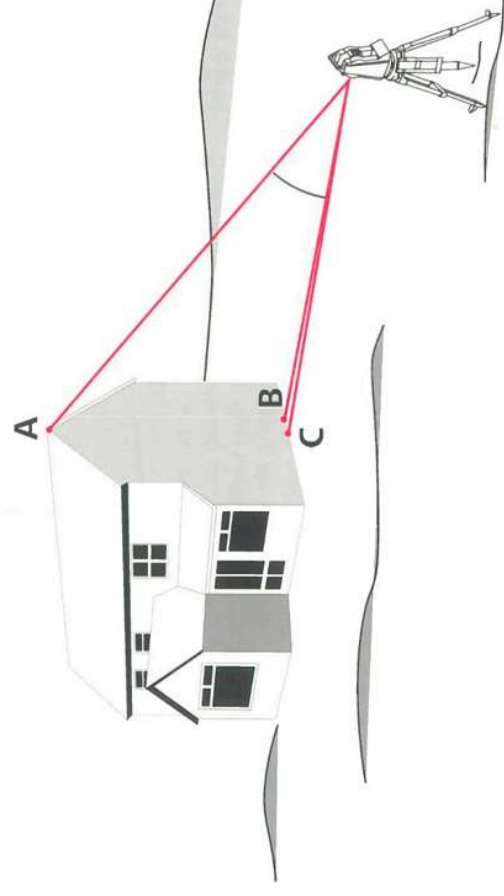
- Kao što je slučaj kod svih geodetskih radova u inženjerstvu, geodetsko snimanje se takođe planira i izvodi u skladu sa prethodno definisanim zahtevima. Kod geodetskog snimanja zahtevi se odnose na obuhvat, detaljnost, preciznost i svrhu podataka koji se prikupe snimanjem. Svi ti zahtevi determinišu izbor geodetske opreme i metodologije rada. Tako na primer, ako će se podaci (rezultati) geodetskog snimanja koristiti za vizuelni pregled objekta, odgovarajuća metodologija može biti fotogrametrijsko snimanje. Za potrebe kontrole geometrije izvedenog objekta najčešće se koristi totalna stanica. Ako je neophodno izraditi detaljan 3D model objekta, terestričko lasersko skeniranje se nameće kao najadekvatnija tehnika.

Selektivno geodetsko snimanje - diskretizacija geometrije objekata

Diskretizacija objekata

Tradicionalno, geodetsko snimanje izvodi se diskretizacijom objekata i prostora, odnosno određivanjem koordinata karakterističnih tačaka merenjem uglova i dužina ili pozicioniranjem pomoću satelitskih (GNSS) sistema.

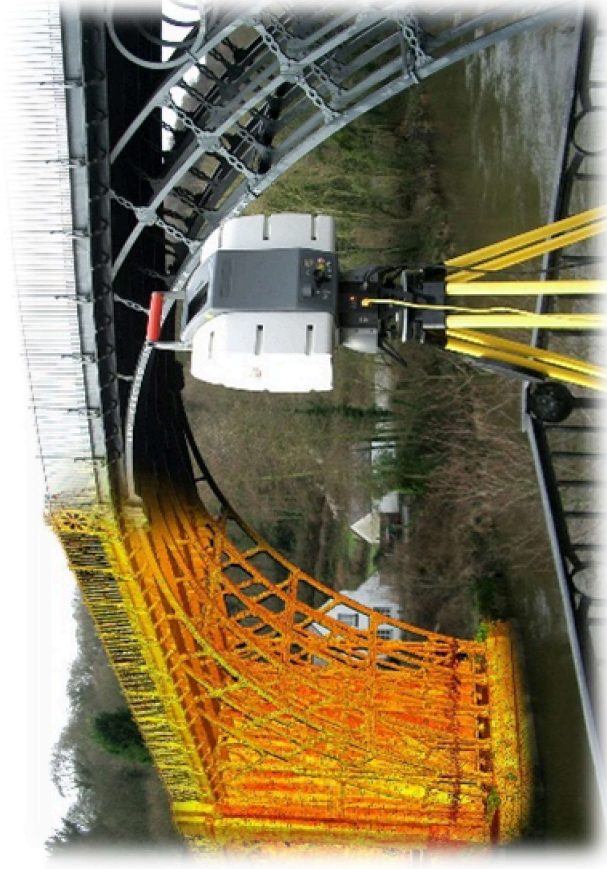
- Totalna stanica
- GNSS RTK
- Nivelir (detaljni nivelman)



Neselektivno geodetsko snimanje

Sa razvojem tehnologije laserskog skeniranja i digitalne fotogrametrije otvorila se mogućnost geodetskog snimanja visoke detaljnosti. Tako prikupljeni podaci omogućavaju izradu detaljnih tehničkih crteža (horizontalnih i vertikalnih preseka objekata), ortofoto karti, kao i izradu digitalnih 3D modela objekata i prostora.

- Terestričko lasersko skeniranje
- Mobilno lasersko skeniranje iz vazduha (ALS) ili sa zemlje (MLS)
- In-door lasersko skeniranje
- Fotogrametrija (bliskopredmetna)



Definicija merenja

Merenje je poređenje između nepoznate veličine i unapred definisanog standarda, određeno nekim mernim uređajem. Svaka izmerena vrednost je aproksimacija tačne ili stvarne vrednosti, a ne tačna vrednost sama po sebi.

— Crandall i Seabloom (1970)

📌 Budući da stvarna vrednost ne može biti tačno izmerena, svako merenje po definiciji sadrži grešku.

Direktna i indirektna merenja

Direktna merenja (posmatranja):

Merenja se vrše neposredno nad traženom veličinom.

👉 Primeri: - merenje dužine pantljičkom -
elektronsko merenje rastojanja (EDM) - merenje ugla
teodolitom ili totalnom stanicom

Indirektna merenja (posmatranja):

Ne vrše se direktno nad traženom veličinom, već nad veličinama koje su s njom povezane.

👉 Primeri: - određivanje koordinata tačke P
merenjem pravaca i rastojanja - određivanje
geografske širine pomoću visina zvezda - određivanje
visine tačke iz visinskih razlika prema poznatoj tački

Šta je kvalitet u inženjerskoj geodeziji?

- **Kvalitet** predstavlja stepen do kojeg rezultati merenja i izračunavanja **ispunjavaju zahteve projekta**, tehničke specifikacije i propisane tolerancije.
- Uključuje:
 - tačnost i pouzdanost podataka,
 - doslednost metodologije,
 - dokumentovanost i mogućnost provere.

Osiguranje kvaliteta vs Kontrola kvaliteta

Aspekt	Obezbeđenje kvaliteta (QA)	Kontrola kvaliteta (QC)
Fokus	Proces	Rezultat
Vreme delovanja	Pre i tokom izvršenja radova	Tokom i nakon izvršenja radova
Svrha	Sprečiti greške	Otkrivanje i korekcija grešaka
Alati	Procedure, standardi	Merenja, proračuni, testovi

Šta podrazumeva QC u geodetskim radovima?

QC se sprovodi kroz:

- Višestruka merenja i statističku obradu podataka
- Analizu reziduala, standardnih devijacija i propagaciju grešaka
- Detekciju outliera i grubih grešaka
- Upoređivanje sa nezavisnim referentnim podacima
- Usklađenje rezultata sa zadatim tolerancijama

Primer QC: Trigonometrijski nivelman

- Visinska razlika:
 $H = d \cdot z + h_i - h_r$
- QC aktivnosti:
 - Merenje u oba smera (AB i BA)
 - Provera simetrije i zatvaranja
 - Analiza odstupanja od prosečne vrednosti
 - Računanje standardne devijacije

Kako se dokazuje kvaliteta?

- **Numerički dokazi:**
 - prosečne vrednosti i standardne devijacije
 - rezultati statističkih testova (npr. χ^2 test)
- **Grafički dokazi:**
 - dijagrami odstupanja, trendovi, outlieri
- **Uporedni dokazi:**
 - rezultati iz više nezavisnih metoda ili timova
- **Dokumentacija:**
 - zapisnici o QC merenjima, kontrolne tabele

Zaključak

- QC je ključan za **pouzdanu primenu geodetskih rezultata** u građevinskim i infrastrukturnim projektima.
- Omogućava:
 - otkrivanje grešaka pre prenosa podataka u projektovanje i izvođenje,
 - zaštitu inženjera od odgovornosti,
 - transparentnost i poverenje u rezultate.

Klasifikacija grešaka merenja

Greška potiče od latinske reči „errare” — što znači „lutati”, a ne „grešiti”.
— Rainsford (1968)

Svako merenje sadrži grešku. Razlikujemo četiri osnovne klase grešaka:

1. Grube greške (greške u radu):

- Pogrešna očitavanja, beleženja i slične greške
- Uzrok: loša tehnika i/ili nepažnja
-  Mogu se eliminisati pravilnim radom i znanjem o opremi

2. Konstantne greške:

- Ne menjaju se tokom merenja; istog su znaka
- Primeri:
 - neusklađenost merne opreme sa etalonom,
 - Pogrešna konstanta prizme,
 - oštećenost merne opreme (peta letve),
-  Uklanjaju se razumevanjem postupka i ispravnom opremom

3. Sistematske greške:

- Prate određeni zakon, poznat ili nepoznat, i zavise od lokalnih uslova i/ili opreme
- Primer:
 - ako se pri EDM merenju ne uzmu u obzir temperatura i pritisak, greška nastaje jer brzina EM talasa kroz atmosferu zavisi od tih uslova
-  Potrebna je korekcija za uslove različite od „standardnih“
-  Kointsantne greške se često poistovećuju sa sistematskim greškama

4. Slučajne greške (nasumične):

- Ostaju nakon eliminacije prethodnih vrsta grešaka
- Uzrok:
 - nesavršenost instrumenata
 - ograničenja posmatrača
 - promenljivi uslovi okoline

Odnos uglovne greške i linearne greške

20" | je jednako | 10 mm | na dužini vizure od 100 m |

10" | je jednako | 5 mm | na dužini vizure od 100 m |

5" | je jednako | 2.5 mm | na dužini vizure od 100 m |

1" | je jednako | 0.5 mm | na dužini vizure od 100 m |

Zaključak

- Svaka merenja uključuju neku vrstu greške
 - Pažljivim radom eliminišu se:
 - grube greške
 - konstantne greške
 - sistematske greške
 - Ostaju samo slučajne greške koje su predmet statističke analize
- 📌 Razumevanje i klasifikacija grešaka su ključni za tačna i pouzdana inženjerska merenja.

Istinite i najverovatnije vrednosti

- Svaka izmerena veličina ima:
 - Istinitu vrednost (nepoznatu)
 - Najverovatniju vrednost (engl. *best estimate*)
- ✚ Bez obzira koliko puta merimo, istinitu vrednost ne možemo znati, već samo aproksimirati.
- Za jednu veličinu izmerenu više puta:
 - Najverovatnija vrednost = **aritmetička sredina** merenja



Greške, korekcije i reziduali

- Istinita greška: razlika između istinite i izmerene vrednosti
 - Pojavna ili prividna greška: razlika između najverovatnije i izmerene vrednosti
- ✚ Popravka (korekcija ili eng. **residual**) je pojam iste veličine kao greška, ali suprotnog znaka:

$$v_k = \bar{x} - x_k$$

U geodeziji, popravke (korekcije) i **reziduali** se smatraju sinonimima, označeni sa v .

Matematička formulacija

Ako smo merili veličinu x ukupno n puta i dobili:

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

Najverovatnija vrednost (aritmetička sredina):

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Korekcija za svako merenje:

$$v_k = \bar{x} - x_k$$

Pojavna ili prividna greška je:

$$-v_k = x_k - \bar{x}$$

Istinita greška i relacije

Istinita greška (nepoznata) definiše se kao:

$$\varepsilon_k = x_k - \mu$$

Relacije među veličinama:

merenje + rezidual = najverovatnija vrednost
merenje – najverovatnija vrednost = prividna greška
merenje – istinska vrednost = istinita greška

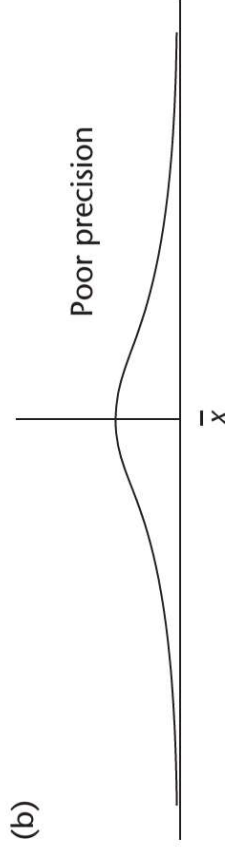
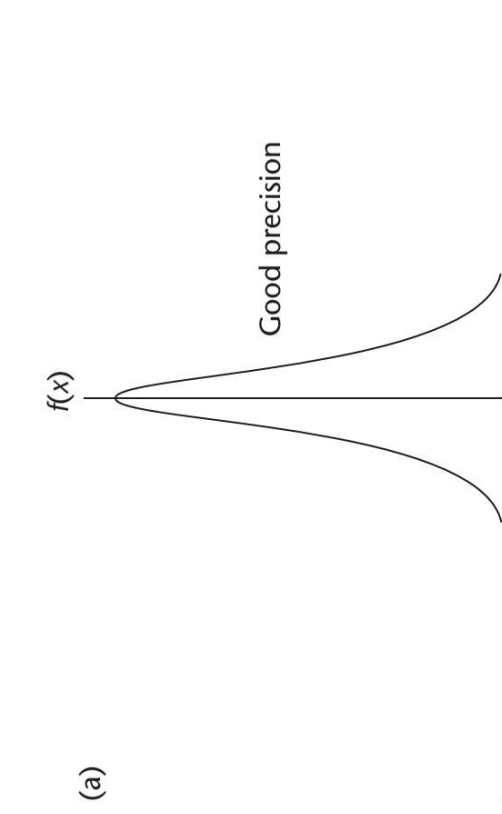
Preciznost i tačnost

Pojmovi *preciznost* i *tačnost* često se koriste u inženjerskoj geodeziji, kako od strane proizvođača prilikom navođenja specifikacija za svoju opremu, tako i na terenu od strane geodeta i inženjera kada opisuju koliko je njihovo terensko merenje kvalitetno.

U svim vrstama geodetskih merenja uvek se teži otkrivanju i eliminisanju grešaka u terenskom radu, a **stepen u kome je geodetski rad u stanju da to učini predstavlja meru njegove pouzdanosti. Nepouzdana merenja** su ona koja mogu sadržati grube greške a da posmatrač toga nije svestan, dok su **pouzdana posmatranja** ona merenja koja su obuhvaćena procedurama i metodologijom koje služe za otkrivanje grubih grešaka.

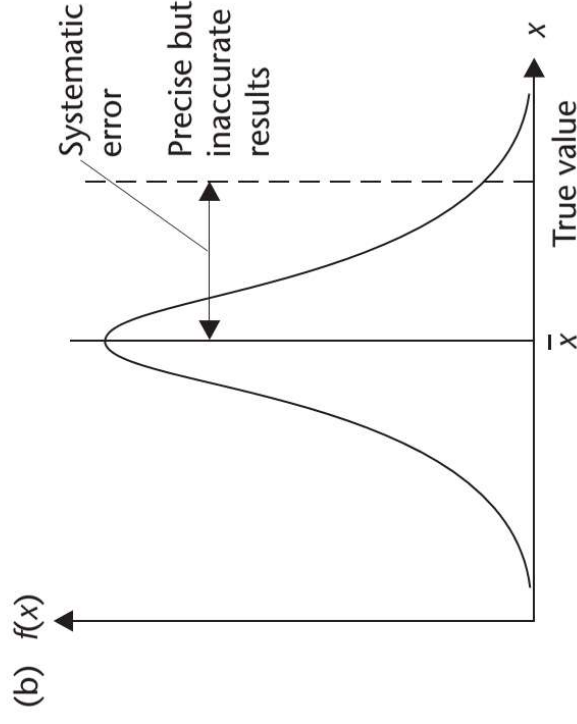
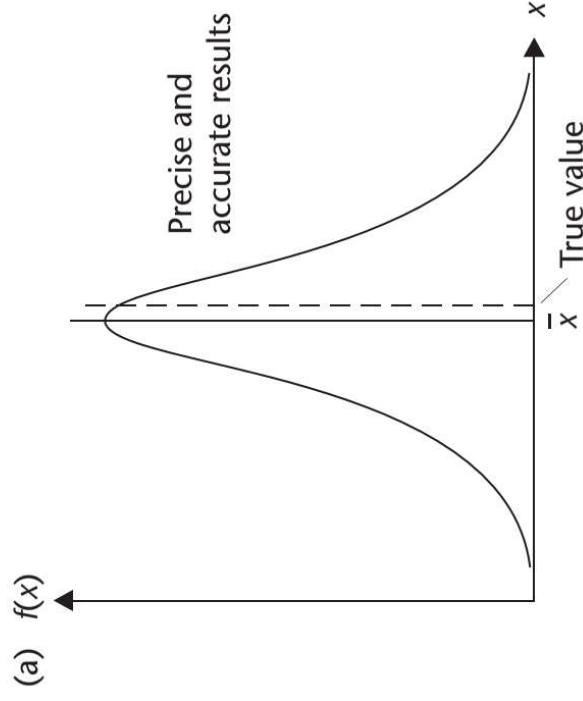
Preciznost

Preciznost se odnosi na ponovljivost merenja i odnosi se isključivo na **slučajne greške**. Visoka preciznost se postiže kada je skup rezultata merenja “zbijen” oko neke vrednosti, sa malim odstupanjima od uzorka srednje vrednosti $\{x\}$ ili najverovatnije vrednosti, i ima normalnu raspodelu (slika (a)). Suprotno tome, skup posmatranja koji je široko rasprostranjen i ima slabu preciznost imaće normalnu raspodelu kao na slici (b).

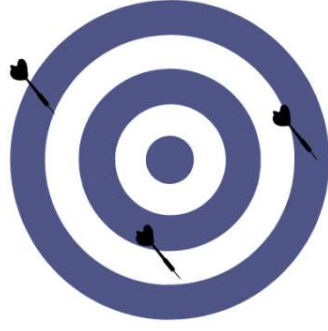


Tačnost

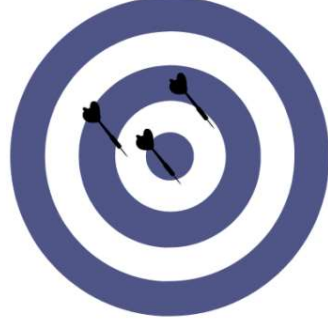
Tačnost, s druge strane, predstavlja **ukupnu procenu grešaka prisutnih u merenju**, uključujući i **sistematske greške**. Da bi skup merenja bio smatran tačnim, najverovatnija vrednost ili srednja vrednost uzorka mora biti bliska stvarnoj vrednosti, kao što je prikazano na slici (levo). Moguće je da skup rezultata bude precizan, ali netačan, kao na slici (desno), gde je razlika između stvarne vrednosti i najverovatnije vrednosti velika, verovatno zbog prisustva jedne ili više sistematskih grešaka. Budući da su tačnost i preciznost iste kada se sve sistematske greške uklone, preciznost se ponekad naziva i **tačnost** ili **internu tačnost**.



Ilustracija tačnosti i preciznosti



✗ low accuracy
✗ low precision



✓ high accuracy
✗ low precision



✗ low accuracy
✓ high precision



✓ high accuracy
✓ high precision

Relativna tačnost

Za mnoga geodetska merenja koristi se izraz **relativna preciznost**, koji predstavlja **odnos preciznosti merenja prema samom merenju**. Na primer, ako je preciznost merenja rastojanja (d) jednaka (s_d), relativna preciznost se izražava kao:

$$\text{Relativna preciznost} = \frac{s_d}{d} \quad (\text{npr. 1 prema 5000})$$

Relativna preciznost se može iskazati i u **delovima po milionu (ppm)**, što je isto kao preciznost od 1 mm po kilometru. Obe ove metode se koriste kod merenja rastojanja totalnim stanicama, kao i pri navođenju tačnosti GNSS vektora (baznih linija).

Veoma često, zahtevi (kriterijumi) koji se definišu za realizaciju određenih pozicija su dati u obliku relativne preciznosti. Na primer, kod linijskih objekata za koje se propisuje visoka tačnost (preciznost), kao što su pruge ili vodovi u vertikalnom smislu, zahtevi tačnosti su dati u obliku relativne preciznosti.

Teorija grešaka i reziduala

✖ Istinite greške su nepoznate i aproksimiraju se pomoću pojavnih ili prividnih grešaka.

✔ Što je najverovatnija vrednost bliža istinitoj, to je prividna greška bliža istinsitoj.

- Teorija grešaka se zasniva na zakonitostima izvedenim iz ponašanja **pojavnih ili prividnih grešaka**
- U praksi se razlika između istinskih i prividnih grešaka često **zanemaruje**



Princip najmanjih kvadrata (Gauss)

“Najverovatniji sistem vrednosti je onaj kod koga je zbir kvadrata razlika između posmatranih i izračunatih vrednosti, pomnoženih faktorima preciznosti, minimalan. (Gauss, 1809)”

- Koristi se za računanja kao što su:
 - Prosečne vrednosti,
 - Težinske proseke,
 - Regresiono modeliranje pravih, krivih linija i površi,
 - izravnjanje geodetskih mreža.

✚ Pretpostavlja se da su merenja **bez grubih, konstantnih i sistematskih grešaka** i sadrže **samo slučajne greške**.

Aritmetička sredina po MNK

Poznato je da se, kada se neka veličina meri više puta, aritmetička sredina uzima kao najbolja procena te veličine. Međutim, retko ko je svestan da se tom praksom zapravo primenjuje **Gaussov princip najmanjih kvadrata**.

Razmotrimo niz merenja $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ neke veličine, a najbolju procenu te veličine označimo sa p . U skladu sa opštom definicijom merenja i korekcija možemo zapisati:

$$x_1 + v_1 = p, \quad x_2 + v_2 = p, \quad x_3 + v_3 = p, \quad \dots, \quad x_n + v_n = p$$

Ove jednačine se mogu preurediti kao:

$$v_1 = p - x_1, \quad v_2 = p - x_2, \quad v_3 = p - x_3, \quad \dots, \quad v_n = p - x_n$$

Ako pretpostavimo da sva merenja imaju jednaku preciznost, možemo formulisati **princip najmanjih kvadrata**

Aritmetička sredina po MNK - nastavak

Definišemo funkciju najmanjih kvadrata φ kao:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n (p - x_i)^2$$

Dakle, φ je funkcija promenljive p . Njena minimalna vrednost se dobija kada je prvi izvod jednak nuli

$$\frac{d\varphi}{dp} = 2(p - x_1) + 2(p - x_2) + \dots + 2(p - x_n) = 0$$

Skratimo članove sa 2 i sredimo jednačinu

$$p = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Dakle, aritmetička sredina niza merenja predstavlja najbolju procenu prema **Gaussovom principu najmanjih kvadrata**.

Procena rasipanja rezultata merenja i standardna devijacija

Kako bi se mogao proceniti kvalitet rezultata merenja u pogledu preciznosti, neophodno je pretpostaviti da odstupanja prate **normalnu raspodelu**. Funkcija normalne raspodele definiše se pomoću dva parametra: 1) **matematičko očekivanje** (μ), i **standardna devijacija** (σ).

Jednačina za standardnu devijaciju promenljive x , merene n puta, data je:

$$\sigma_x = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n}} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n}}$$

gde su:

- x_i — pojedinačna merenja,
- $\bar{x}$ — aritmetička sredina (najverovatnija vrednost),
- $v_i = \bar{x} - x_i$ — **rezidual**, tj. odstupanje.

Kvadrat standardne devijacije σ^2 naziva se **varijansa**.

Standardna devijacija i standardna greška

Iz statističkih razloga, standardna devijacija treba da se izračunava na osnovu velikog broja posmatranja. Pošto se u geodetskoj praksi merenja obično izvode u malim skupovima, izračunate standardne devijacije mogu biti **pristrasne**.

Zbog toga je pogodnije koristiti **nepristrasne ocene** standardne devijacije, poznat kao **standardna greška** s_x , koja se dobija zamenom n sa $n - 1$ u prethodnoj jednačini, što daje:

$$\text{Standardna greška} = s_x = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n - 1}} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n - 1}}$$

Međutim, termin standardna devijacija i standardna greška se često poistovećuju, tj. zanemaruje se preduslov o veličini uzorka. Iz praktičnih razloga i tradicije naše škole, standardna greška će u nastavku teksta biti označavana sa σ .

Stepeni slobode i suvišna merenja

U ovoj jednačini, izraz $(n - 1)$ poznat je kao **broj stepena slobode** ili **redundansa** i predstavlja broj dodatnih merenja izvršenih radi određivanja jedne veličine. Na primer, ako je rastojanje izmereno 10 puta, tada postoji $(10 - 1) = 9$ stepena slobode, što znači da postoji devet suvišnih (redundantnih) posmatranja, budući da je samo jedno merenje dovoljno za određivanje rastojanja.

Bez suvišnih posmatranja nije moguće izračunati **standardne devijacije** ili **standardne greške**!

Suvišna merenja se takođe koriste za proveru terenskih podataka, kao i za otklanjanje uticaja pojedinih grešaka.

Primeri:

- Merenje visinskih razlika napred-nazad,
- Merenje tri ugla u trouglu,
- Merenje u različitim vremenskim uslovima,
- Merenje pravca u dva položaja durbina.

Standardna devijacija aritmetičke sredine

Iako **standardna greška** σ_x daje meru rasipanja skupa posmatranja, ona se takođe može smatrati standardnom greškom **pojedinačnog merenja** u seriji. Pored toga, važna je i preciznost konačnog rezultata merenja, a **standardna greška aritmetičke sredine** (najverovatnije vrednosti) skupa posmatranja označava se kao $\sigma_{\bar{x}}$ i data je izrazom:

$$\sigma_{\bar{x}} = \pm \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Ova formula ima praktičnu primenu u geodeziji. Pretpostavimo da se neka veličina meri terenskom procedurom i opremom za koju je poznata standardna greška. Na primer, rastojanje se meri mernom trakom (pantlijikom) dužine 30 m, pri čemu je poznata standardna greška $\sigma_x = 6$ mm. Ako se zahteva standardna greška od $\sigma_{\bar{x}} = 3$ mm uz korišćenje iste opreme, iz jednačine (gore) dobijamo (uz $\sigma_x = 6$ mm i $\sigma_{\bar{x}} = 3$ mm):

$$\sigma_{\bar{x}} = 3 = \frac{6}{\sqrt{n}} \quad \text{odnosno} \quad \sqrt{n} = \frac{6}{3} \quad \text{što daje} \quad n = 4$$

Ovo pokazuje da bi, da bi se **duplirala preciznost**, rastojanje moralo da se meri četiri puta i da se izračuna aritmetička sredina!

Standardna greška i intervali poverenja

Standardna greška za niz merenja ukazuje na verovatnoću, odnosno šansu, da se stvarna vrednost merenja nalazi unutar određenog opsega oko **aritmetičke sredine**. Može se pokazati da za **normalnu raspodelu** postoji **68.3% verovatnoće** da se stvarna vrednost merenja nalazi u opsegu od:

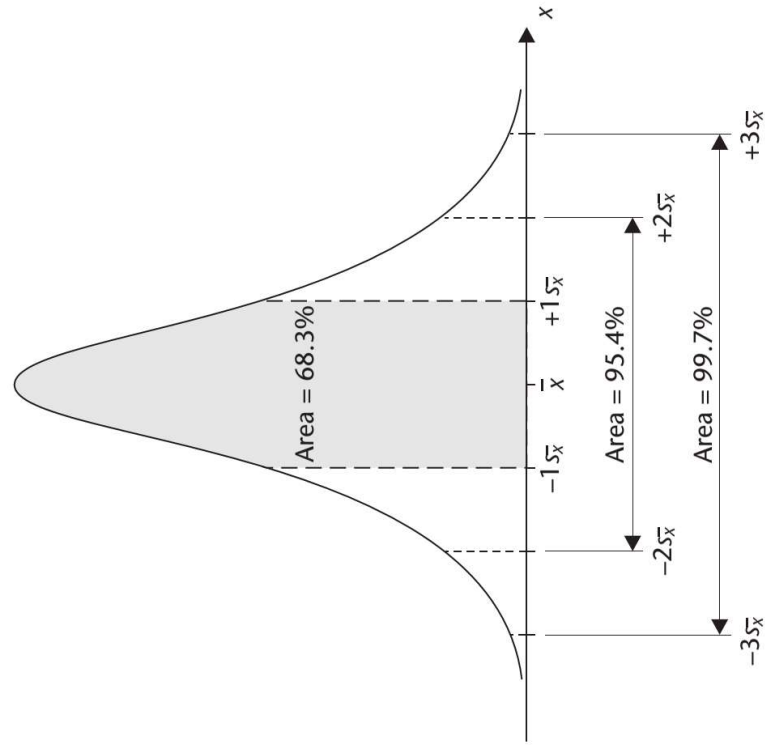
$$\bar{x} - \sigma_x \quad \text{do} \quad \bar{x} + \sigma_x$$

Opsezi unutar kojih se pretpostavlja da se nalaze stvarne vrednosti nazivaju se **intervali poverenja** (*confidence intervals*). Ovi intervali su prikazani u tabeli i slici ispod.

👉 Važno je napomenuti da verovatnoće pretpostavljaju da su merenja **normalno distribuirana** i da su iz njih prethodno uklonjene sve **grube i sistematske greške**.

Ilustracija

Probability %	68.3	90	95	95.4	99	99.7	99.9
Confidence interval	$\pm 1 s_{\bar{x}}$	$\pm 1.65 s_{\bar{x}}$	$\pm 1.96 s_{\bar{x}}$	$\pm 2 s_{\bar{x}}$	$\pm 2.58 s_{\bar{x}}$	$\pm 3 s_{\bar{x}}$	$\pm 3.29 s_{\bar{x}}$



grf

PRIMER - Računanje najverovatnije vrednosti ugla i standardne greške

Merenja ugla α su:

$47^{\circ} 56' 38''$,	$47^{\circ} 56' 40''$,	$47^{\circ} 56' 35''$,	$47^{\circ} 56' 33''$,	$47^{\circ} 56' 40''$,
$47^{\circ} 56' 34''$,	$47^{\circ} 56' 42''$,	$47^{\circ} 56' 39''$,	$47^{\circ} 56' 32''$,	$47^{\circ} 56' 37''$

Najverovatnija vrednost (aritmetička sredina)

Najverovatnija vrednost ugla data je aritmetičkom sredinom:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= 47^{\circ}56' + \frac{(38 + 40 + 35 + 33 + 40 + 34 + 42 + 39 + 32 + 37)''}{10} \\ &= 47^{\circ}56'37.0''\end{aligned}$$

Tabela odstupanja i kvadrata odstupanja

i	α_i	$v_i = (\bar{\alpha} - \alpha_i) \text{ sec}$	$v_i^2 \text{ sec}^2$
1	47°56'38"	-1	1
2	47°56'40"	-3	9
3	47°56'35"	+2	4
4	47°56'33"	+4	16
5	47°56'40"	-3	9
6	47°56'34"	+3	9
7	47°56'42"	-5	25
8	47°56'39"	-2	4
9	47°56'32"	+5	25
10	47°56'37"	0	0
		$\Sigma v_i = 0$	$\Sigma v_i^2 = 102$

Računanje standardne greške

Standardna greška pojedinačnih merenja:

$$s_{\alpha} = \pm \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{102}{10-1}} = \pm 3.4''$$

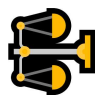
Standardna greška aritmetičke sredine:

$$s_{\bar{\alpha}} = \pm \frac{s_{\alpha}}{\sqrt{n}} = \pm \frac{3.4}{\sqrt{10}} = \pm 1.1''$$

Konačni rezultat

Najverovatnija vrednost ugla () može se izraziti kao:

$$\bar{\alpha} = 47^{\circ}56'37'' \pm 1.1''$$



Težinska sredina – izvođenje

Razmotrimo merenja $x_1, x_2, \dots, x_n$ sa težinama $w_1, w_2, \dots, w_n$. Neka je q najbolja procena:

$$x_1 + v_1 = q, \quad x_2 + v_2 = q, \quad \dots, \quad x_n + v_n = q$$

Odnosno:

$$v_i = q - x_i$$

Primena Gaussovog principa najmanjih kvadrata:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n w_i (q - x_i)^2$$

Težinska sredina – računanje

Minimum funkcije φ dobijamo kad je:

$$\frac{d\varphi}{dq} = \sum_{i=1}^n 2w_i(q - x_i) = 0$$

Skraćivanjem i uređivanjem:

$$q = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

📌 Ovo je **težinska sredina** – najbolja procena prema Gaussovom principu najmanjih kvadrata.



Veza između težina i varijanse

Još jedna mera preciznosti često korišćena u primeni metode najmanjih kvadrata je **težina merenja**, koja se definiše kao **obrnuto proporcionalna varijansi**:

$$w_i \propto \frac{1}{s_i^2} \quad \text{odnosno} \quad w_i = \frac{\sigma_0^2}{s_i^2}$$

📌 Gde je σ_0^2 **referentna varijansa** — konstanta proporcionalnosti.

Pojam težine

- Ako merenje ima težinu $w_i = 1$, tada je njegova varijansa jednaka σ_0^2
- Zbog toga se σ_0^2 često naziva i **varijansa merenja jedinice težine**
- 📌 Ova definicija podrazumeva da su merenja **nezavisna** (nekorelacionisana)



Primer – tri merenja rastojanja

Posmatrajmo tri nezavisna merenja iste dužine, dobijena kao srednje vrednosti iz više ponovljenih merenja:

Merenje 1 | 136.225 m (st dev. 0.010 m) |

Merenje 2 | 136.233 m (st dev. 0.032 m) |

Merenje 3 | 136.218 m (st dev. 0.024 m) |



Računanje težina

Težina je obrnuto proporcionalna varijansi. Neka merenje 2 ima težinu 1:

$$w_2 = 1 = \frac{\sigma_0^2}{(0.032)^2} \Rightarrow \sigma_0^2 = (0.032)^2$$

Ostale težine:

$$w_1 = \frac{(0.032)^2}{(0.010)^2} = 10.24$$

$$w_2 = \frac{(0.032)^2}{(0.032)^2} = 1$$

$$w_3 = \frac{(0.032)^2}{(0.024)^2} = 1.78$$

Napomena: dodela težina bez direktnih merenja

Ponekad se težine dodeljuju na osnovu druge informacije.

 Primer: rastojanje je mereno 3 puta. Druga dva merenja su proseci 6 i 4 merenja:

- Težine se dodeljuju kao: 3, 6 i 4
- Sličan primer je dodeljivanje težina na osnovu broja stanica u nivelmanskom vlaku.

 Ovakva dodela je gruba aproksimacija relativne preciznosti

Zahtevi tačnosti u inženjerskoj geodeziji

- Inženjerski objekti zahtevaju visoku pouzdanost pozicioniranja, često u milimetrima.
- 👉 **Zahtevi tačnosti** definišu se projektom, standardima ili funkcionalnošću objekta.
- Geodetska merenja moraju zadovoljiti ove zahteve uz kontrolisano odstupanje.
- 📌 Postoji direktna veza između: - projektovanih tolerancija - dozvoljenih geodetskih grešaka - potrebne preciznosti opreme i metode



Obezbeđenje kvaliteta merenja

Kvalitet geodetskih merenja podrazumeva:

- Tačnost – koliko je rezultat blizu istinite vrednosti
- Preciznost – ponovljivost rezultata
- Pouzdanost – procena verovatnoće da je greška unutar prihvatljivih granica



Obezbeđuje se kroz:

- Pravilno planiranje merenja
- Korišćenje odgovarajuće opreme
- Kalibraciju i testove instrumenta
- Redovnu analizu i kontrolu rezultata

Zaključak

- Zahtevi tačnosti postavljaju standarde koje merenja moraju ispuniti
- Kvalitet merenja se obezbeđuje pažljivim planiranjem, preciznom opremom i kontrolom podataka
- Statistička analiza je ključni alat za ocenu da li su merenja dovoljno dobra

🚩 Bez statističkih ocena grešaka, geodetska merenja ne mogu biti verifikovana ni prihvaćena u inženjerskim projektima.

Zakon prenosa grešaka - slučaj linearnih funkcija

Razmotrimo dva vektora slučajnih promenljivih:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

koji su linearno povezani matričnom jednačinom:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

gde je $\mathbf{A}$ matrica koeficijenata, a $\mathbf{b}$ vektor konstanti.



Očekivana vrednost vektora

Očekivana vrednost vektora $\mathbf{y}$ je:

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_y &= E\{\mathbf{y}\} \\ &= E\{\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\} \\ &= \mathbf{A}E\{\mathbf{x}\} + \mathbf{b} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{m}_x + \mathbf{b}\end{aligned}$$



Matrica kovarijansi

Varijansa vektora $\mathbf{y}$ (tj. kovariaciona matrica) je:

$$\begin{aligned}\Sigma_{yy} &= E\{(\mathbf{y} - \mathbf{m}_y)(\mathbf{y} - \mathbf{m}_y)^T\} \\ &= E\{(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{m}_x - \mathbf{b})(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{m}_x - \mathbf{b})^T\} \\ &= E\{(\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x))(\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x))^T\} \\ &= \mathbf{A}E\{(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^T\}\mathbf{A}^T \\ &= \mathbf{A}\Sigma_{xx}\mathbf{A}^T\end{aligned}$$

Zakon prenosa grešaka - matrična forma

Ako je $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$, tada je:

$$\Sigma_{yy} = \mathbf{A}\Sigma_{xx}\mathbf{A}^T$$

Matrica Σ_{xx} ili K_{xx} se zove **Kovariaciona matrica** Može imati tri oblika:

- Merenja su iste preciznosti i nekorelisana,
- Merenja su različite preciznosti i nekorelisana,
- Merenja su različite preciznosti i korelisana.

Zakon prenosa grešaka - slučaj nelinearnih funkcija

U mnogim praktičnim slučajevima, vektori slučajnih promenljivih su nelinearno povezani:

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$

U tom slučaju, funkcija se razvija u Tejlorov red oko tačke $\mathbf{x} = \mathbf{a}$.



Tejlorov red (jedna promenljiva)

Za nelinearnu funkciju $f(x)$ Tejlorov red glasi:

$$f(x) = f(a) + \frac{df}{dx} \Big|_a (x-a) + \frac{d^2f}{dx^2} \Big|_a \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots \\ + \frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}} \Big|_a \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + R_n$$

gde je R_n ostatak reda.



Tejlorov red za dve promenljive

Za funkciju $\phi = f(x, y)$, razvoj oko tačke (a, b) glasi:

$$\begin{aligned} \phi = f(a, b) &+ \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{a,b} (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{a,b} (y - b) \\ &+ \frac{1}{2!} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{a,b} (x - a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{a,b} (y - b)^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{a,b} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{a,b} (x - a)(y - b) \right\} + \dots \end{aligned}$$



Proširenje na više promenljivih (vektorski oblik)

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \text{viši redovi}$$

Uzimajući samo prvi član razvoja:

$$\mathbf{y} \approx f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$$

Očekivana vrednost vektora $\mathbf{y}$

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_y &= E\{\mathbf{y}\} \\ &= f(\mathbf{x}^0) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}^0} E\{\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\} \\ &= f(\mathbf{x}^0) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{m}_x - \mathbf{x}^0)\end{aligned}$$



Odstupanje y od očekivane vrednosti

$$\begin{aligned} \mathbf{y} - \mathbf{m}_y &= \left[f(\mathbf{x}^0) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \right] - \left[f(\mathbf{x}^0) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{m}_x - \mathbf{x}^0) \right] \\ &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x) \\ &= \mathbf{J}_{yx} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x) \end{aligned}$$



Jakobijeva matrica

$$\mathbf{J}_{\mu x} = \begin{bmatrix} \partial y_1 / \partial x_1 & \partial y_1 / \partial x_2 & \cdots & \partial y_1 / \partial x_n \\ \partial y_2 / \partial x_1 & \partial y_2 / \partial x_2 & \cdots & \partial y_2 / \partial x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial y_n / \partial x_1 & \partial y_n / \partial x_2 & \cdots & \partial y_n / \partial x_n \end{bmatrix}$$



Kovarijansa za nelinearnu funkciju

$$\begin{aligned}\Sigma_{yy} &= E \left\{ (\mathbf{y} - \mathbf{m}_y) (\mathbf{y} - \mathbf{m}_y)^T \right\} \\ &= E \left\{ (\mathbf{J}_{yx} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)) (\mathbf{J}_{yx} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x))^T \right\} \\ &= \mathbf{J}_{yx} E \left\{ (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x) (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^T \right\} \mathbf{J}_{yx}^T \\ &= \mathbf{J}_{yx} \Sigma_{xx} \mathbf{J}_{yx}^T\end{aligned}$$

što predstavlja i opšti oblik zakona o prenosu grešaka.



Zakon o prenošenju varijanse (specijalni slučaj)

Ako je z funkcija dve slučajne promenljive x i y , tj. $z = f(x, y)$, tada je varijansa promenljive z data formulom:

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2 + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \sigma_{xy}$$

Zakon o prenošenju varijanse (specijalni slučaj)

Ako su slučajne promenljive x i y nezavisne, tj. $\sigma_{xy} = 0$, tada se zakon svodi na:

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2$$

📌 Ovo je **specijalni zakon o prenošenju varijanse** koji se često koristi u inženjerskoj geodeziji kada su merenja nezavisna.

Primer: prenos grešaka za funkciju zbira

Razmotrimo funkciju:

$$A = a + b$$

gde su a i b merene veličine sa standardnim greškama σ_a i σ_b .

Primer: prenos grešaka za funkciju zbira

Kada se veličine sabiraju ili oduzimaju:

$$\sigma_A^2 = \left(\frac{\partial A}{\partial a} \cdot \sigma_a \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial b} \cdot \sigma_b \right)^2$$

Za sabiranje i oduzimanje:

$$\sigma_A = \pm (\sigma_a^2 + \sigma_b^2)^{1/2}$$

Važi i za oduzimanje jer se samo menjaju znaci, ne greške.

Poseban slučaj: jednake greške

Ako je:

$$\sigma_a = \sigma_b = \sigma$$

i imamo \$n\$ sabiranja:

$$\sigma_A = \pm \sigma \cdot \sqrt{n}$$

👉 Ne mešati ovu formulu sa formulom za grešku aritmetičke sredine!

Primer: prenos grešaka za funkciju proizvoda

Razmotrimo proizvod:

$$A = a \cdot b \cdot c$$

gde su a, b, c opterećeni standardnim greškama.

Primer: prenos grešaka za funkciju proizvoda

$$\sigma_A^2 = (bc \cdot \sigma_a)^2 + (ac \cdot \sigma_b)^2 + (ab \cdot \sigma_c)^2$$

$$\sigma_A = \pm abc \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_c}{c}\right)^2}$$

🚩 Relativne greške se sabiraju u kvadratu.

Nastavak

Definišemo:

$$R_a = \frac{\sigma_a}{a}, R_b = \frac{\sigma_b}{b}, R_c = \frac{\sigma_c}{c}$$

Tada:

$$\sigma_A = \pm abc \cdot \sqrt{R_a^2 + R_b^2 + R_c^2}$$

✓ Važno u geodetskim transformacijama i proračunima površina!

Primer: prenos grešaka za funkciju količnika

Funkcija:

$$A = \frac{a}{b}$$

$$\sigma_A^2 = \left(\frac{\sigma_a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a \cdot \sigma_b}{b^2}\right)^2$$

$$\sigma_A = \pm \frac{a}{b} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2}$$

📌 Greška zavisi od relativnih grešaka brojilaca i imenioca.

Nastavak

Kao i kod proizvoda, možemo pisati:

$$\sigma_A = \pm \frac{a}{b} \cdot \sqrt{R_a^2 + R_b^2}$$

 Posebno važno pri izračunavanju nagiba, razmera i srednjih vrednosti.

Primer 1 — Zbir uglova trougla

Tri ugla u trouglu merena su sa preciznošću od:

$$\sigma = 2''$$

Ocena greške zbira uglova u trouglu:

$$\sigma_T = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \pm 2 \cdot \sqrt{3} = 3.5''$$

Primer 2 — ocena trećeg ugla

Dva ugla u trouglu su merena sa preciznošću:

- $\sigma_a = \pm 2''$
- $\sigma_b = \pm 3''$

Treći ugao dobija se iz izraza:

$$c = 360^\circ - a - b$$

Ocena greške trećeg ugla jednaka je:

$$\sigma_c = \pm \sqrt{2^2 + 3^2} = \pm \sqrt{13} = \pm 3.6''$$

Primer: proračun varijanse za ocenu koordinata tačke X i Y

Ako se koordinate tačke A mogu izraziti kao:

$$\begin{aligned} Y_A &= Y_S + \Delta Y = Y_S + D \sin(\beta) \\ X_A &= X_S + \Delta X = X_S + D \cos(\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta Y &= D \sin \beta \\ \Delta X &= D \cos \beta \end{aligned}$$

tada su parcijalne varijanse:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta Y}^2 &= \sin^2 \beta \cdot \sigma_D^2 + D^2 \cos^2 \beta \cdot \sigma_\beta^2 \\ \sigma_{\Delta X}^2 &= \cos^2 \beta \cdot \sigma_D^2 + D^2 \sin^2 \beta \cdot \sigma_\beta^2 \end{aligned}$$

Gde su σ_D i σ_β standardne devijacije merenog rastojanja i zenitnog ugla.

Numerički primer

Zadato je:

- $D = 60.000 \text{ m}$
- $\beta = 85^{\circ}36'00'' \rightarrow \beta = 1.493 \text{ rad}$
- $\sigma_D = 8 \text{ mm} + 5 \text{ ppm} = 0.0083 \text{ m}$
- $\sigma_{\beta} = 10'' = 4.8481 \times 10^{-5} \text{ rad}$

Tada su:

$$\begin{aligned}\sigma_Y^2 &= (\sin \beta)^2 (0.0083)^2 + D^2 (\cos \beta)^2 (\sigma_{\beta})^2 = 6.85 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \\ \sigma_X^2 &= (\cos \beta)^2 (0.0083)^2 + D^2 (\sin \beta)^2 (\sigma_{\beta})^2 = 8.82 \times 10^{-6} \text{ m}^2\end{aligned}$$



Standardne devijacije

$$\sigma_Y = \sqrt{6.85 \times 10^{-5}} = 0.0083 \text{ m}$$

$$\sigma_X = \sqrt{8.82 \times 10^{-6}} = 0.0030 \text{ m}$$

Iako su D i β nezavisne promenljive, rezultujuće vrednosti X i Y nisu nezavisne.

Primer u matičnom obliku: X i Y

Ako:

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$

Gde su:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} D \\ \beta \end{bmatrix}$$

Nastavak

Tada je kovarijanska matrica:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{yy} &= \begin{bmatrix} \sigma_Y^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{YX} & \sigma_X^2 \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{yx} \Sigma_{xx} \mathbf{J}_{yx}^T \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial D} & \frac{\partial Y}{\partial \beta} \\ \frac{\partial X}{\partial D} & \frac{\partial X}{\partial \beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_D^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial D} & \frac{\partial X}{\partial D} \\ \frac{\partial Y}{\partial \beta} & \frac{\partial X}{\partial \beta} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sin \beta & D \cos \beta \\ \cos \beta & -D \sin \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (0.0083)^2 & 0 \\ 0 & (4.8481 \times 10^{-5})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \beta & \cos \beta \\ D \cos \beta & -D \sin \beta \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0.9971 & 4.6031 \\ 0.0767 & -59.8232 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (0.0083)^2 & 0 \\ 0 & (4.8481 \times 10^{-5})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9971 & 0.0767 \\ 4.6031 & -59.8232 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 6.85 \times 10^{-5} & 4.62 \times 10^{-6} \\ 4.62 \times 10^{-6} & 8.82 \times 10^{-6} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Dijagonalni elementi predstavljaju varijanse σ_Y^2 i σ_X^2 , dok van-dijagonalni elementi predstavljaju kovarijansu σ_{YX} , što ukazuje na to da su Y i X međusobno zavisni.

